گاج

ویرایش جدید

منطبق بر «امتحان نهایی»

«خرداد ۱۴۰۴»

فرمول بیست

ریاضی ۳

پایه دوازدهم

رشته علوم تجربی

مؤلّف

علی‌اکبر طالبی

فرمول بیست

۸۰
صفحه
درسنامه

۸۰۰
پرسش
تشریحی

۱۰
نمونه
امتحانی

+۱۰
ساعت
فیلم
آموزشی
ویژه
شب
امتحان

9 786220 306894
تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

پیشگفتار

ن و القلم و ما یسطرون

توی سال دوازدهم، اولویت اصلی با تست‌زنیه و کاملاً هم کار درستیه، اما خب یه مشکلی وجود داره و چیزی نیست جز امتحان‌های مدارس (نیمسال اول) و امتحان‌های نهایی کشوری (نیمسال دوم)!

مدل و نحوهٔ پاسخگویی به سؤالات تشریحی، کاملاً متفاوت از سؤال‌های تستیه و تمام کاری که توی این کتاب کردیم، همینه که ابتدا با یک آموزش ساده و کامل روی تمام تکنیک‌های امتحان‌های نهایی مسلط بشین و بعدش با سیل عظیمی از سؤالات تشریحی مواجه میشین.

در این کتاب...

۱. تمام مطالب کتاب تو درس‌نامه‌ها پوشش داده شده، پس درس‌نامه‌ها رو خوب بخون و تمام مثال‌هاش رو حل کن. در ضمن نکته‌ها و فرمول‌ها رو خوب به خاطر بسپار.

۲. تمام سؤالات امتحانات نهایی رو تو این کتاب گردآوری کردیم تا با نحوهٔ سؤالات امتحان نهایی آشنا بشین.

۳. تمام تمرینات کتاب درسی مشابه‌سازی شده و یا نمونهٔ اون رو به صورت امتحان نهایی آوردیم.

۴. تست‌های با علامت ویژه دانش‌آموزان سخت‌کوش می‌باشد.

۵. برای جمع‌بندی و دوره کردن مطالب در شبِ امتحان، به فیلم‌های آموزشی ویژهٔ شب امتحان که QR-code آن در ابتدای هر فصل اومده، مراجعه کن.

به امید موفقیت‌های بزرگت ...

علی‌اکبر طالبی

فهرست

امتحان نهایی

بارم‌بندی درس ریاضی ۳

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم
اول		۷	۲/۵
دوم		۵	۲/۵
سوم		۵	۲/۵
چهارم	تا صفحه ۷۶	۳	۱
	صفحه ۷۷ به بعد	-	۳/۵
پنجم		-	۳
ششم		-	۳
هفتم		-	۲
جمع		۲۰	۲۰

۱

بخش

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

۱ تابع

ریاضی **دوازدهم**

فصل اول ریاضی ۳، در امتحان نوبت اول، ۷ نمره و در نوبت دوم، ۲/۵ نمره و در شهریور و دی، ۳ نمره دارد. در این فصل مباحثی چون توابع چندجمله‌ای، توابع یکنوا و اکیداً یکنوا، ترکیب توابع، رسم نمودار به کمک انتقال، قرینه و ... وارون تابع و ویژگی‌های آن مطرح شده است.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هر بسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بسته ۱	بسته ۲ و ۳	بسته ۴

بسته اول

توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

صفحهٔ ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

بستهٔ اول شامل تعریف توابع چندجمله‌ای، توابع صعودی و نزولی است که معمولاً در امتحان نهایی به‌صورت درست یا نادرست و هم‌چنین تکمیل‌کردن جای خالی، از آن سؤال مطرح می‌شود.

الف توابع چند جمله‌ای

توابعی را که ضابطهٔ آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر باشند، توابع چندجمله‌ای می‌گوییم. به عبارت دیگر به تابع با ضابطهٔ $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ که در آن a_0 ، a_1 ، ... و a_n اعداد حقیقی، $a_n \neq 0$ و $n\in \mathbb{W}$ ، تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌گوییم.

نکته دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ خواهد بود. برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد، همواره برابر $\mathbb{R}$ است.

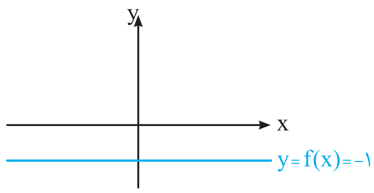
مثال هریک از توابع مقابل یک تابع چندجمله‌ای با دامنهٔ $\mathbb{R}$ می‌باشند: $g(x)=-3x^2+5x+1$ $\quad f(x)=2x^5-4x^3-\frac{1}{2}x+3$

f یک تابع چند جمله‌ای از درجهٔ فرد ۵ است و در نتیجه برد تابع f برابر $\mathbb{R}$ است.

یادآوری با انواع توابع چندجمله‌ای قبلاً آشنا شده‌ایم، تعریف آن‌ها به‌صورت یادآوری گفته می‌شود:

۱ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ صفر که به آن تابع ثابت می‌گوییم. ضابطهٔ تابع ثابت به‌صورت $f(x)=a$ است که در آن a یک عدد حقیقی دلخواه است. نمودار تابع ثابت به‌صورت یک خط به موازات محور x ها می‌باشد.

مثال نمودار تابع $f(x)=-1$ به‌صورت مقابل است:

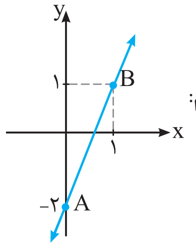


۲ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ یک که به آن تابع خطی می‌گوییم. ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax+b$ ، $a\neq 0$ می‌باشد. نمودار آن یک خط راست است و برای رسم آن از دو نقطهٔ دلخواه روی آن استفاده می‌کنیم.

مثال تابع $f(x)=3x-2$ یک تابع دو جمله‌ای از درجهٔ اول است. برای رسم نمودار، دو نقطهٔ دلخواه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=3(0)-2=-2 \Rightarrow A(0,-2)$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=3(1)-2=1 \Rightarrow B(1,1)$$



دو نقطهٔ A و B را روی دستگاه مشخص می‌کنیم و آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم و از دو طرف ادامه می‌دهیم.

۳ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ که ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، $a\neq ۰$ است. نمودار تابع درجه ۲ را سهمی می‌گوییم و برای رسم آن باید رأس سهمی را مشخص کنیم:

$$S(x=-\frac{b}{۲a}\ ,\ f(-\frac{b}{۲a})=-\frac{\Delta}{۴a})$$

اگر $a>۰$ ، سهمی رو به بالا و اگر $a<۰$ ، آن‌گاه سهمی رو به پایین است. در سهمی خط $x=-\frac{b}{۲a}$ ، محور تقارن سهمی است.

نکته برای رسم سهمی می‌توان در صورت امکان، محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را مشخص کرد.

سؤال **نمودار تابع درجه دوم به معادلهٔ $f(x)=-x^{۲}+۶x-۵$ را رسم کنید.**

پاسخ ابتدا مختصات رأس سهمی را مشخص می‌کنیم:

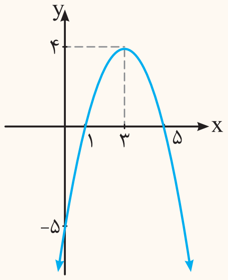
$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۶}{۲(-۱)}=۳\Rightarrow y_S=f(۳)=-۹+۱۸-۵=۴$$

حالا مختصات محل تلاقی سهمی با محورهای مختصات را نیز به دست می‌آوریم:

$$x=۰\Rightarrow y=-۵\ ,\ y=۰\Rightarrow -x^{۲}+۶x-۵=۰\xrightarrow{\times(-۱)}x^{۲}-۶x+۵=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x-۵)=۰\Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۵$$

x	۰	۱	۳ (S)	۵
y	-۵	۰	۴	۰

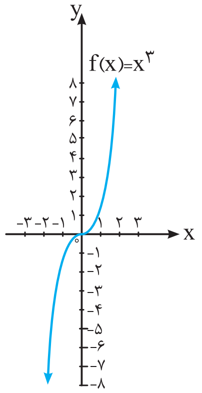


علاوه بر نمودارهایی که تاکنون یادگرفته‌اید، نمودار $y=x^{۳}$ را نیز حفظ کنید که با توجه به آن و به کمک انتقال و ... نمودارهای دیگری را رسم می‌کنیم.

تابع درجه ۳

تابع چندجمله‌ای با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ ، $a\neq ۰$ یک تابع درجه ۳ است. دامنه و برد این تابع برابر $\mathbb{R}$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

نمودار تابع $y=x^{۳}$ به کمک نقطه‌یابی به‌صورت مقابل است:



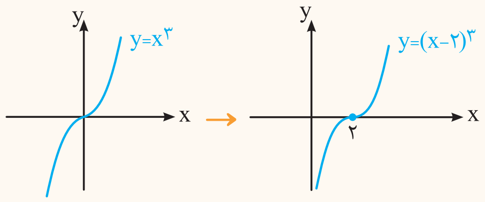
x	$f(x)=x^{۳}$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	۸

نکته فقط نمودار توابعی به صورت $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ را می‌توان رسم کرد که با کمک اتحادها به‌صورت $y=a(x-b)^{۳}+c$ نوشته شود. به عنوان مثال، ضابطهٔ تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱$ به‌صورت $y=(x+۱)^{۳}$ است و می‌توان نمودار آن را به کمک انتقال رسم کرد.

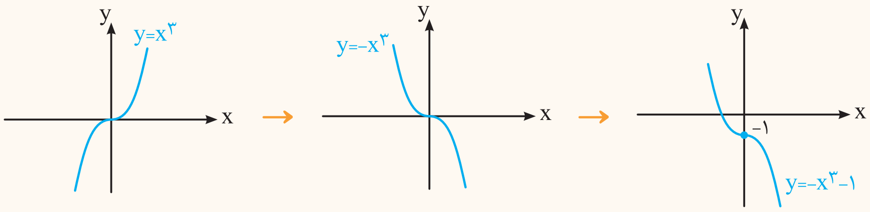
سؤال **نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.**

۱ $y=(x-۲)^{۳}$ **۲** $y=-x^{۳}-۱$

پاسخ **۱** اگر نمودار $y=x^{۳}$ را دو واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار تابع $y=(x-۲)^{۳}$ به دست می‌آید.



۲ ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^{۳}$ به دست آید. با انتقال نمودار $y=-x^{۳}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^{۳}-۱$ رسم می‌شود:



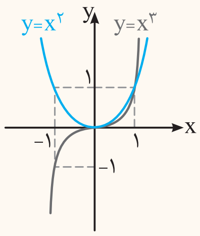
تلنگر: حواست باشه !
مقایسهٔ نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ که در یک بازه، کدام بالاتر و یا پایین‌تر قرار می‌گیرد، از سؤالات امتحانی است.

سؤال نمودار توابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید که در کدام بازه، نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار می‌گیرد؟

پاسخ برای مقایسهٔ نمودار دو تابع، ابتدا نقاطی را که مقدار دو تابع برابر می‌شوند را مشخص می‌کنیم. یعنی باید معادلهٔ $x^3 = x^2$ را حل کنیم:

$$x^2 = x^3 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

پس دو تابع در دو نقطه با طول‌های $x = 0$ و $x = 1$ برهم منطبق‌اند.
از دو نقطهٔ کمکی دیگر نیز برای رسم نمودار استفاده می‌کنیم.
نمودار دو تابع در یک دستگاه به‌صورت مقابل است:
با توجه به نمودار، در بازهٔ $(-\infty, 0)$ و $(0, 1)$، نمودار $y = x^2$ بالاتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد و در بازهٔ $(1, +\infty)$، نمودار $y = x^3$ بالاتر از نمودار $y = x^2$ قرار دارد.



x	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2$	۱	۰	۱	۴
$y = x^3$	-۱	۰	۱	۸

در این قسمت، تعریف توابع یکنوا و اکیداً یکنوا را یاد می‌گیریم. توابعی را بررسی می‌کنیم که ابتدا نمودار آن‌ها را رسم می‌کنیم و سپس به سؤالات پاسخ می‌دهیم.

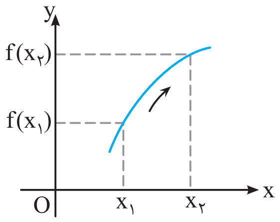
ب توابع اکیداً صعودی و نزولی

فرض کنیم $A \subseteq D_f$ باشد؛

تعریف می‌گوییم تابع f روی A اکیداً صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

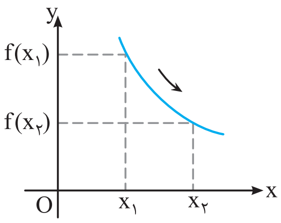
در نمودار توابع اکیداً صعودی، وقتی روی محور xها، از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار همواره در حال بالا رفتن است.



تعریف می‌گوییم f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ داشته باشیم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

در نمودار مقابل، وقتی مقدار x در دامنهٔ f افزایش می‌یابد، مقدار y کاهش می‌یابد. در واقع نمودار از چپ به راست، در حال پایین آمدن است.



تعریف به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

توابع صعودی و نزولی

تعریف تابع f روی A صعودی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in A$:

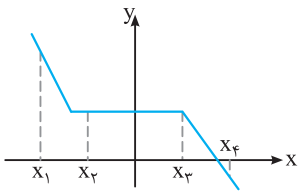
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

و تابع f روی A نزولی است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in A$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$$

مثال در نمودار زیر، هرچه مقدار x در دامنهٔ تابع f بیش‌تر می‌شود، مقدار y یا کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند. طبق تعریف، تابع f، تابعی نزولی است.

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) = f(x_3) > f(x_4)$$



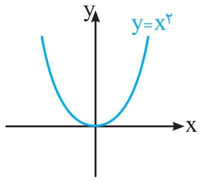
تعریف به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

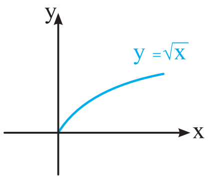
تلنگر: حواست باشه !
تعریف تابع ثابت و این نکته که تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی است، در امتحان مطرح می‌شود.

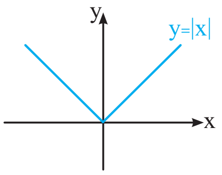
تعریف تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد.

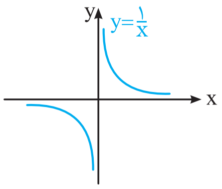
! نکته با توجه به تعریف، تابع ثابت در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود و در نتیجه تابعی یکنوا است.

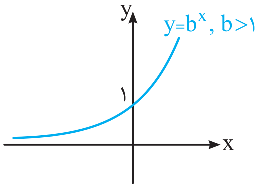
یادآوری در این قسمت برخی از نمودارهایی را که باید به عنوان نمودار اصلی حفظ باشیم و از آن‌ها در یکنوایی استفاده کنیم را رسم کرده‌ایم:

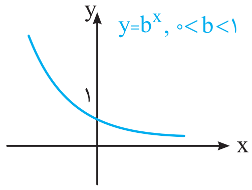


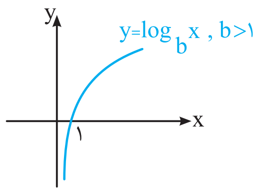


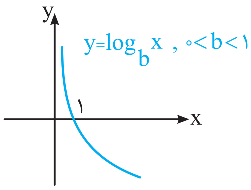


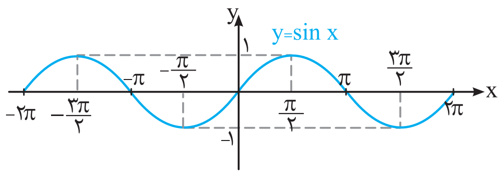


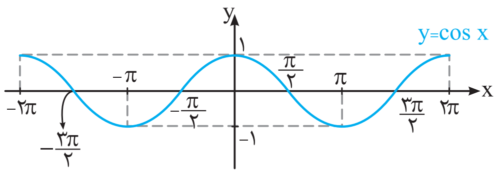






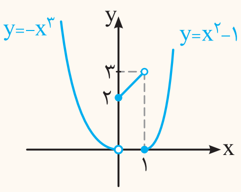






سؤال نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\geq ۱ \\ x+۲ & ۰\leq x<۱ \\ -x^۳ & x<۰ \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی است؟

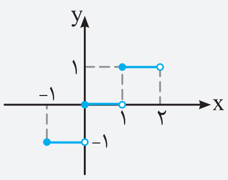
پاسخ با رسم سهمی $y=x^۲-۱$ در بازهٔ $[۱,+\infty)$، خط $y=x+۲$ در بازهٔ $[۰,۱)$ و تابع درجه سوم $y=-x^۳$ در بازهٔ $(-\infty,۰)$، نمودار تابع f به دست می‌آید:



با توجه به نمودار تابع f، تابع f روی بازهٔ $(-\infty,۰)$، تابعی اکیداً نزولی، روی بازهٔ $[۰,۱)$، تابعی اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۱,+\infty)$، تابعی اکیداً صعودی است. توجه کنید که تابع f روی $\mathbb{R}$، اکیداً یکنوا نیست.

! نکته تفاوت نمودار توابع اکیداً یکنوا و توابع یکنوا در این است که در توابع یکنوا قسمتی از نمودار یا تمام نمودار می‌تواند خطی به موازات محور xها باشد.

مثال تابع $y=[x]$ که نمودار آن به‌صورت مقابل است، تابعی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد.



بسته ۱ — پرسش‌های تشریحی

توابع چندجمله‌ای – توابع صعودی و نزولی

● درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱. تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. (دی ۹۷، خرداد ۹۹)

۲. دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است. (شهریور ۱۴۰۰)

۳. تابع $y=-x^{۳}+۲$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است. (شهریور ۹۸)

۴. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است. (شهریور ۱۴۰۰)

۵. تابع $y=\sqrt{۲}x^{۳}-\frac{۳}{۴}x$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است. (دی ۱۴۰۰)

۶. برد تابع $f(x)=۴x^{۳}+x-۱$ برابر $\mathbb{R}$ است.

۷. تابع $y=۲x^{۵}-۴x^{۳}+\sqrt{۷}x$ یک تابع چندجمله‌ای نیست. (خرداد ۹۹ خارج)

۸. تابع $f(x)=\sin x+۵x$ یک تابع چندجمله‌ای است. (دی ۹۹ خارج)

۹. تابع $f(x)=|x|$ در تمام دامنه‌اش صعودی است. (خرداد ۹۹ خارج)

۱۰. هر تابع اکیداً یکنوا، یکنوا نیست. (دی ۹۹ خارج)

۱۱. تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ در دامنه خود یک تابع اکیداً نزولی است. (شهریور۱۴۰۰ خارج)

۱۲. بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (خرداد ۱۴۰۲)

۱۳. تابع $y=\sqrt{۲}x-x^{۲}$ یک تابع درجه دوم است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۴. تابع $f(x)=x^{۳}$، تابعی اکیداً صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۵. تابع $y=۲^{x}-۲$ صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج)

● در سؤال‌های ۱۶ تا ۲۲، در جاهای خالی، عبارت مناسب قرار دهید.

۱۶. توابع اکیداً یکنوا، همواره .... هستند. (شهریور ۹۹)

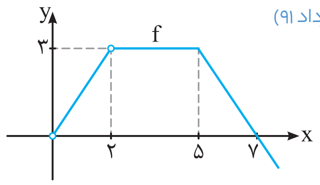
۱۷. در بازهٔ $(۰,۱)$، نمودار تابع $y=x^{۳}$، .... نمودار تابع $y=x^{۲}$ قرار دارد. (دی ۹۹ و ۱۴۰۰)

۱۸. تابع $y=(x+۱)^{۳}$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی – نزولی) است. (خرداد ۹۸)

۱۹. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود. (دی ۹۸ و خرداد ۹۹ خارج)

۲۰. تابع $y=۲^{x}$ در دامنهٔ تعریف خود .... (اکیداً صعودی – اکیداً نزولی) است.

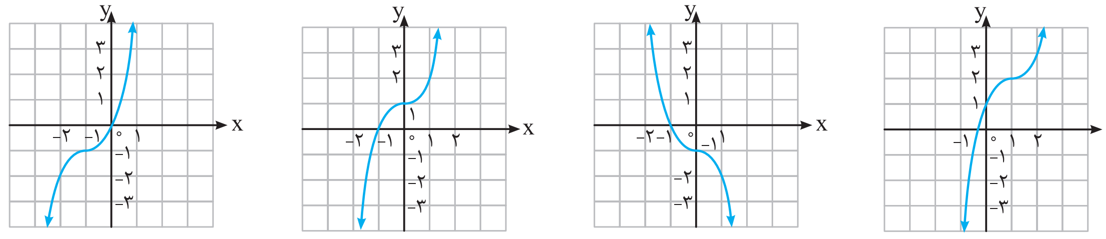
۲۱. تابع f با نمودار مقابل در بازهٔ .... اکیداً صعودی و در بازهٔ .... اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۲,۵]$، .... است. (خرداد ۹۱)



۲۲. تابع $g(x)=x^{۲}-۴x+۵$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۳)

۲۳. ضابطهٔ هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

آ) $y=x^{۳}+۱$ ب) $y=-x^{۳}-۱$ پ) $y=(x-۱)^{۳}+۲$ ت) $y=(x+۱)^{۳}-۱$



(۱) (۲) (۳) (۴)

● نمودار توابع سؤالات ۲۴ تا ۲۸ را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۲۴. $y=x^{۳}-۱$

۲۵. $y=-x^{۳}-۲$

۲۶. $y=(x+۲)^{۳}-۱$

۲۷. $y=(x-۲)^{۳}+۱$ (خرداد ۱۴۰۳)

۲۸. $y=-(x-۱)^{۳}-۱$

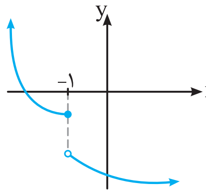
۲۹. نمودار توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ را در یک دستگاه رسم کنید و مشخص کنید در کدام بازه، نمودار کدام تابع بالاتر و کدام پایین‌تر است؟

(فعالیت صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

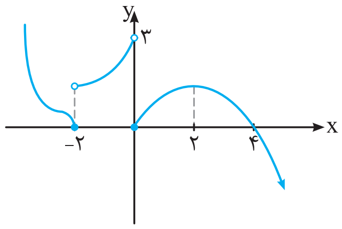
● در هر کدام از توابع سؤالات ۳۰ و ۳۱، مشخص کنید در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی (صعودی) و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی (نزولی) هستند.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

۳۰.



۳۱.



۳۲. روی بازهٔ $[0,2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازهٔ $[0,1]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $[1,2]$ اکیداً نزولی باشد.

۳۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (تمرین ۷ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۳۴. نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$$

۳۵. ضابطهٔ تابعی را بنویسید که در دامنهٔ خود غیریکنوا باشد.

● نمودار توابع سؤالات ۳۶ تا ۴۲ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

۳۶. $f(x)=-x^2+4x$

۳۷. $f(x)=x+|x|$

۳۸. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

۳۹. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

۴۰. $f(x)=-x^3+2$

۴۱. $f(x)=x^2|x|$

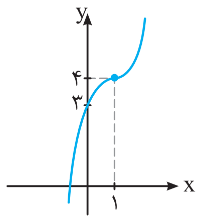
۴۲. $f(x)=\cos x, x\in[-\pi,2\pi]$

۴۳. نمودار هر یک از توابع $y=b^x$ و $y=\log_b x$ را در حالت‌های $b>1$ و $0<b<1$ رسم کنید و در هر حالت نوع یکنوایی تابع را مشخص کنید.
هم‌چنین با رسم توابع $y=2^x-2$ و $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$، نوع یکنوایی آن‌ها را مشخص کنید.

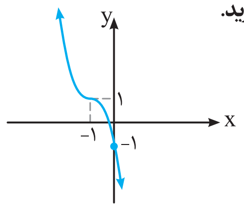
۴۴. تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ 2 & 0<x\le 1 \\ -x-1 & x\le 0 \end{cases}$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a چقدر است؟ (مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۴۵. نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x+2$ را رسم کنید.

۴۶. نمودار تابع $y=a(x-b)^3+c$ به‌صورت مقابل است. مقادیر a، b و c را مشخص کنید.



۴۷. نمودار تابع $f(x)=a(x+b)^3+c$ به‌صورت مقابل است. اگر $g(x)=b(x-a)^3+c$ باشد، مقدار $g(2)$ را به دست آورید.



۴۸. نمودار $f(x)=x^3$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع g حاصل شود. نمودار توابع f و g با چه طول‌هایی همدیگر را قطع می‌کنند؟

بسته دوم

ترکیب توابع

صفحه ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

در این قسمت از دو تابع f و g، تابع جدیدی می‌سازیم که به آن ترکیب توابع می‌گوییم. مسائل مهم در این درسنامه به دست آوردن ضابطهٔ تابع مرکب، مقدار عددی و دامنهٔ تابع مرکب با استفاده از تعریف است.

ترکیب توابع

تعریف ترکیب دو تابع f و g تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُ جی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog: x \longrightarrow f(g(x))$ تعریف می‌کنیم.

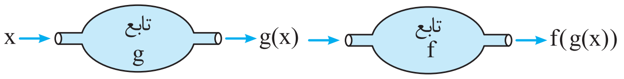
نمودار ترکیب دو تابع به‌صورت مقابل است:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "(fog)(x)=f(g(x))"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & f(g(x)) \end{tikzcd}$$

مراحل ساخت تابع fog:

۱ x باید در دامنهٔ g باشد. در مرحلهٔ اول، x ورودی و $g(x)$ خروجی است.

۲ $g(x)$ باید در دامنهٔ f باشد. در مرحلهٔ دوم، $g(x)$ ورودی و $f(g(x))$ خروجی است.



نکته برای به دست آوردن ضابطهٔ $(fog)(x)$، در تابع f به جای x ضابطهٔ $g(x)$ را قرار می‌دهیم.

سؤال اگر $f(x)=۳x-۲$ و $g(x)=۴x-۵$ دو تابع باشند، ضابطهٔ هریک از توابع fog و gof را مشخص کنید.

پاسخ اگر در ضابطهٔ تابع f به جای x، $g(x)$ قرار دهیم، ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۴x-۵)=۳(۴x-۵)-۲=۱۲x-۱۵-۲=۱۲x-۱۷$$

هم‌چنین با قرار دادن $f(x)$ به جای x در ضابطهٔ تابع g، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ مشخص می‌شود:

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۳x-۲)=۴(۳x-۲)-۵=۱۲x-۸-۵=۱۲x-۱۳$$

نکته همان‌طور که در این سؤال می‌بینیم، ضابطهٔ fog و gof لزوماً یکی نیستند. ممکن است در مثال‌هایی fog و gof یکسان شوند.

سؤال اگر $f(x)=x^۲-۵x+۲$ و $g(x)=۲x-۱$ باشند، جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x)=-۴$ را مشخص کنید. **مشابه تمرین ۹ کتاب درسی**

پاسخ ضابطهٔ تابع fog را به دست می‌آوریم و آن را مساوی ۴- قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x-۱)=(۲x-۱)^۲-۵(۲x-۱)+۲$$

$$(fog)(x)=-۴ \Rightarrow (۲x-۱)^۲-۵(۲x-۱)+۲=-۴$$

با فرض $۲x-۱=A$، داریم:

$$A^۲-۵A+۲=-۴ \Rightarrow A^۲-۵A+۶=۰ \Rightarrow (A-۲)(A-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=۲ \\ A=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۲ \\ ۲x-۱=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۳ \\ ۲x=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ x=۲ \end{cases}$$

تلنگر: حواست باشه

اینکه ضابطهٔ دو تابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم مقدار عددی fog یا gof را به دست بیاوریم، در سؤالات امتحان نهایی وجود دارد.

سؤال اگر $f(x)=\sqrt{۲x+۱}$ و $g(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ دو تابع باشند، مقدار عددی $(fog)(-۳)$ و $(gof)(۴)$ را به دست آورید.

پاسخ مقدار عددی $(fog)(-۳)$ برابر $f(g(-۳))$ است. ابتدا مقدار $g(-۳)$ را با قرار دادن عدد -۳ به جای x در ضابطهٔ g به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow g(-۳)=\frac{-۳}{-۳+۱}=\frac{-۳}{-۲}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow f(g(-۳))=f(\frac{۳}{۲})$$

حال باید در ضابطهٔ f به جای x، $\frac{۳}{۲}$ قرار دهیم:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}\Rightarrow f(\frac{۳}{۲})=\sqrt{۲\times\frac{۳}{۲}+۱}=\sqrt{۳+۱}=۲\Rightarrow (fog)(-۳)=۲$$

برای به دست آوردن مقدار $(gof)(۴)$، یعنی $g(f(۴))$ ابتدا مقدار $f(۴)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۲x+۱}\Rightarrow f(۴)=\sqrt{۲\times ۴+۱}=\sqrt{۹}=۳\Rightarrow g(f(۴))=g(۳)$$

حال باید مقدار $g(۳)$ را از ضابطهٔ $g(x)$ به دست بیاوریم:

$$g(x)=\frac{x}{x+۱}\Rightarrow g(۳)=\frac{۳}{۳+۱}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow g(f(۴))=g(۳)=\frac{۳}{۴}$$

سؤال اگر $f=\{(۲,-۱),(۱,۴),(۳,۰),(۵,۲)\}$ و $g=\{(۴,۲),(۳,۱),(۲,۱),(۱,۶)\}$ دو تابع باشند، هر یک از توابع fog و gog را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید. **مشابه تمرین ۱ کتاب درسی**

پاسخ برای مشخص کردن تابع fog، ابتدا تابع روی g اثر می‌کند:

$۳\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۴$ $\quad(fog)(۳)=۴$

$۴\xrightarrow{g}۲\xrightarrow{f}-۱$ $\quad(fog)(۴)=-۱$

$۱\xrightarrow{g}۶\xrightarrow{f}?$ $\quad(fog)(۱)$ وجود ندارد

$۲\xrightarrow{g}۱\xrightarrow{f}۴$ $\quad(fog)(۲)=۴$

$$\Rightarrow fog=\{(۴,-۱),(۳,۴),(۲,۴)\}$$

برای مشخص کردن تابع gog، داریم:

$(gog)(۴)=g(g(۴))=g(۲)=۱\Rightarrow(۴,۱)\in gog$ ، $(gog)(۳)=g(g(۳))=g(۱)=۶\Rightarrow(۳,۶)\in gog$

$(gog)(۲)=g(g(۲))=g(۱)=۶\Rightarrow(۲,۶)\in gog$ ، $(gog)(۱)=g(g(۱))=g(۶)$ تعریف‌نشده

بنابراین: $gog=\{(۴,۱),(۳,۶),(۲,۶)\}$

سؤال تابع $h(x)=(x^۳-۱)^۲$ را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید (به دو روش).

پاسخ **روش اول** تابع $y=x^۳$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=x^۳,f(x)=(x-۱)^۲\Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^۳)=(x^۳-۱)^۲$$

روش دوم تابع $y=x^۳-۱$ را به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می‌گیریم و با قرار دادن x به جای $x^۳-۱$، تابع حاصل را $f(x)$ در نظر می‌گیریم:

$$g(x)=x^۳-۱,\ f(x)=x^۲\Rightarrow h(x)=f(g(x))=f(x^۳-۱)=(x^۳-۱)^۲$$

دامنهٔ تابع مرکب

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع gof دو روش وجود دارد:

روش اول تابع $gof(x)$ را تشکیل دهیم و دامنهٔ تابع به دست آمده را تعیین کنیم (در این روش **نباید** ضابطهٔ تابع را در هیچ مرحله‌ای ساده کنیم).

سؤال اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد، دامنهٔ تابع fog را به دست آورید.

پاسخ

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲$$

دامنهٔ تابع $y=(\sqrt{x})^۲$ مجموعهٔ $[۰,+\infty)$ است، بنابراین:

$$D_{fog}=[۰,+\infty)\ ,\ x\geq ۰\Rightarrow(fog)(x)=x$$

توجه کنید که اگر قبل از تعیین دامنه به جای $(\sqrt{x})^۲$، x بنویسیم، ضابطهٔ تابع به‌صورت $(fog)(x)=x$ درمی‌آید که دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود.
بنابراین ضروری است که ابتدا دامنهٔ تابع را محاسبه کنیم و سپس آن را ساده کنیم.

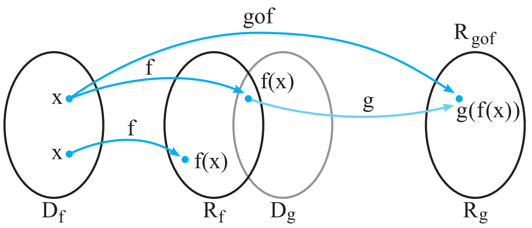
تلنگر: حواست باشه!

تعیین دامنهٔ ترکیب دو تابع، یکی از سؤالات پرتکرار امتحان نهایی است.

روش دوم دامنهٔ تابع مرکب gof ، مجموعه x هایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت مقابل نوشت:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

توجه اگر $f(x)$ در دامنهٔ تابع g وجود نداشته باشد، آن‌گاه مقدار $g(f(x))$ تعریف نشده است.

! نکته برای به دست آوردن دامنهٔ تابع fog :

۱ دامنهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم.

۲ شرط $g(x)\in D_f$ را که معمولاً یک نامعادله است، حل می‌کنیم و جواب آن را به دست می‌آوریم.

۳ باید از دامنهٔ g و جوابی که از مرحلهٔ ۲ به دست می‌آید اشتراک بگیریم.

سؤال **اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند. آن‌گاه:**

۱ دامنهٔ تابع gof را به کمک تعریف به دست آورید.

۲ مقدار تابع fog را به ازای $x=۱۱$ به دست آورید.

پاسخ ۱ دامنهٔ تابع درجه اول f برابر $\mathbb{R}$ است. برای به دست آوردن دامنهٔ تابع رادیکالی g ، داریم:

$$x-۲\geq ۰\Rightarrow x\geq ۲\Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$$

طبق تعریف، دامنهٔ تابع gof به‌صورت مقابل است:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{x-۱}{۲}\geq ۲\}$$

$$\frac{x-۱}{۲}\geq ۲\Rightarrow x-۱\geq ۴\Rightarrow x\geq ۵\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq ۵\}=[۵,+\infty)$$

۲ مقدار تابع fog به ازای $x=۱۱$ ، برابر $f(g(۱۱))$ است:

$$g(x)=\sqrt{x-۲}\Rightarrow g(۱۱)=\sqrt{۹}=۳\Rightarrow f(g(۱۱))=f(۳)=\frac{۳-۱}{۲}=۱$$

تلنگر: حواست باشه!

یکی از تمرینات کتاب درسی که سؤال امتحان نهایی نیز از آن مطرح شده است، به دست آوردن ضابطهٔ $g(x)$ با در اختیار داشتن ضابطهٔ توابع $f(x)$ و $f(g(x))$ است.

محاسبهٔ g(x) با در اختیار داشتن f(g(x)) و f(x)

اگر $f(g(x))$ و $f(x)$ معلوم باشند و $g(x)$ را بخواهیم، ابتدا از روی ضابطهٔ تابع f ، $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم و سپس آن را با ضابطهٔ $f(g(x))$ داده‌شده برابر قرار می‌دهیم و از این تساوی ضابطهٔ $g(x)$ را تعیین می‌کنیم.

سؤال **اگر $f(g(x))=۲x$ و $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ باشد، ضابطهٔ $g(x)$ را مشخص کنید.** **مشابه تمرین ۳ کتاب درسی**

پاسخ از ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ ، $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم:

$$f(g(x))=\frac{g(x)}{g(x)-۱}\ ,\ f(g(x))=۲x\Rightarrow \frac{g(x)}{g(x)-۱}=\frac{۲x}{۱}$$

$$\Rightarrow g(x)=۲xg(x)-۲x\Rightarrow g(x)-۲xg(x)=-۲x\Rightarrow g(x)(۱-۲x)=-۲x\Rightarrow g(x)=\frac{-۲x}{۱-۲x}$$

بسته ۲ **پرسش‌های تشریحی** ترکیب توابع

● **کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟** (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۴۹. اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آن‌گاه $(fog)(۴)=۵$ (دی ۱۴۰۰)

۵۰. اگر $f(x)=۲x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x^۲+۳}$، آن‌گاه $(fog)(۱)=f(۱)$

۵۱. اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=x^۲-۱$، دامنه تابع gof تهی است. (دی ۹۸ خارج)

۵۲. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sin x$ باشند، آن‌گاه $(gof)(x)=\sqrt{\sin x}$ خواهد بود. (خرداد ۹۹ خارج)

۵۳. اگر f تابعی با دامنهٔ D_f و برد R_f و g تابعی با دامنهٔ D_g و برد R_g باشد، آن‌گاه شرط تشکیل تابع fog آن است که $D_f \cap R_g \neq \varnothing$ باشد.

۵۴. برای دو تابع f و g که $f \neq g$، تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

● **در سؤالات ۵۵ تا ۵۹، درجاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.**

۵۵. اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{۱+|x|}$، مقدار $fof(۱)$ برابر .... است. (دی ۱۴۰۲)

۵۶. دامنهٔ تابع .... برابر $\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ است.

۵۷. تابع $h(x)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و .... $= g(x)$ است. (دی ۹۷)

۵۸. اگر $f(۳)=۷$ و $g(-۱)=۳$ باشد، آن‌گاه $(fog)(-۱)$ برابر .... است. (دی ۱۴۰۱ خارج)

۵۹. اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ باشد، آن‌گاه $(fog)(۵)$ برابر .... است. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۶۰. اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۵,-۱),(۰,۲)\}$ و $g=\{(۴,-۲),(-۱,۵),(۲,۱),(۳,۰)\}$ دو تابع باشند، توابع fog ، gof و gog را به دست آورید. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۶۱. اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$، تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

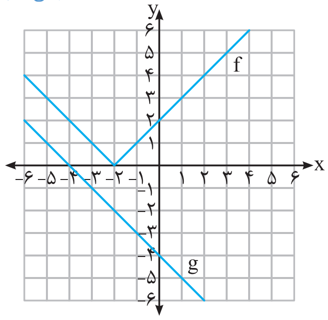
● **با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید.** (شهریور ۱۴۰۰)

x	-۱	۰	۱	۲
f(x)	۰	-۱	۲	-۵
g(x)	۲	۳	۴	-۲

۶۲. $(gof)(۱)$

۶۳. $(fo(f+g))(۰)$

● **با توجه به نمودارهای توابع f و g به دو سؤال زیر پاسخ دهید:** (دی ۹۹)



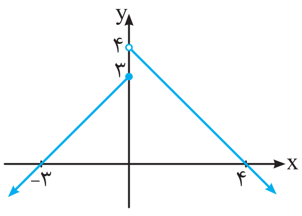
۶۴. مقدار $fog(-۱)$ را محاسبه کنید.

۶۵. اگر $g(۳t-۱)=۰$، آن‌گاه مقدار t را به دست آورید.

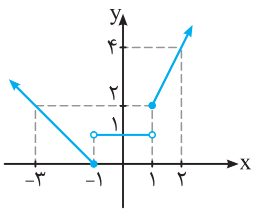
۶۶. با توجه به نمودار توابع f و g، هریک از مقادیر زیر را به دست آورید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

آ) $(fog)(۲)$ ب) $(gof)(۰)$ پ) $(gof)(۴)$

ت) $(fog)(-۱)$ ث) $(fof)(-۴)$ ج) $(gog)(۵)$



نمودار تابع f



نمودار تابع g

● درسؤالات ۶۷ و ۶۸، با توجه به ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$، معادلات مورد نظر را تشکیل دهید و آن‌ها را حل کنید. (مشابه تمرین ۹ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۶۷. $g(x)=5x+2$ ، $f(x)=4x-1$ ، $(fog)(x)=-23$

۶۸. $f(x)=3x^2-4x-7$ ، $g(x)=2x+5$ ، $(gof)(x)=-1$

۶۹. اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=3x+k$ باشد، مقدار k را طوری بیابید که $(fog)(x)=(gof)(x)$ (شهریور ۸۷)

۷۰. توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. (دی ۹۷)

● توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ داده شده‌اند؛ با توجه به آن‌ها به سؤالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۴)

۷۱. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۷۲. تابع gof را تشکیل دهید.

● دو تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید و با توجه به آن‌ها به سؤالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۵)

۷۳. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۷۴. مقدار $(gof)(-3)$ را به دست آورید.

● اگر $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ و $g(x)=\sqrt{1-x}$ دو تابع باشند؛ به سؤالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۱)

۷۵. دامنهٔ توابع f و g را به دست آورید.

۷۶. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف محاسبه کنید.

۷۷. ضابطهٔ fog را بنویسید.

● اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x-1$، آن‌گاه: (خرداد ۱۴۰۲)

۷۸. دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۷۹. ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

● دو تابع $g(x)=\frac{3}{x}$ و $f(x)=\frac{2}{x-1}$ داده شده‌اند؛ با توجه به آن‌ها به سؤالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۸ خارج)

۸۰. ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

۸۱. دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

● توابع f و g با ضابطه‌های $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ و $f(x)=\sqrt{x-6}$ داده شده‌اند؛ با توجه به آن‌ها به سؤالات زیر پاسخ دهید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۸۲. ضابطهٔ تابع gof را بنویسید.

۸۳. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

● توابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ داده شده‌اند، با توجه به آن‌ها به سؤالات زیر پاسخ دهید. (خرداد ۹۸)

۸۴. ضابطهٔ تابع gof را تعیین کنید.

۸۵. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف آن به دست آورید.

● اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد؛ به سه سؤال زیر پاسخ دهید: (شهریور ۹۸ و ۹۹، خرداد ۱۴۰۰)

۸۶. دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

۸۷. مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.

۸۸. ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

۸۹. اگر $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ باشد، دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. (دی ۹۸)

۹۰. اگر ورودی ماشین زیر ۳ باشد، مقدار خروجی آن چه قدر است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

$$\text{ورودی } x \longrightarrow 2x-2 \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} \longrightarrow \text{خروجی}$$

● **در سؤالات ۹۱ تا ۹۴ هریک از توابع را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید.** (مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۹۱. $y=\sqrt[3]{1-2x}$ (خرداد ۱۴۰۱ خارج) **۹۲.** $y=(2x^3-x^2+5)^4$ **۹۳.** $y=\sqrt{x^2+3}$ **۹۴.** $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-1}$

۹۵. اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید. (خرداد ۹۹ و خرداد ۹۹ خارج)

۹۶. اگر $f(x)=x^2+2x+2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x)=x^2-4x+5$ (مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۲ کتاب درسی)

۹۷. اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=x^2+bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $(fog)(x)=x^2+4x+1$ (شهریور ۹۲)

۹۸. اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^2+bx+c$ باشد، a، b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $(fog)(x)=x^2-3x+4$ (شهریور ۸۸)

۹۹. اگر $f(3x+2)=9x^2-6x$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

۱۰۰. اگر $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ و $f(g(x))=x+3$ باشد، ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.

۱۰۱. اگر $f(x)=\log_2(x-1)$ و $g(x)=\sqrt{x-4}$ باشد، دامنهٔ تابع gof را به دست آورید.

۱۰۲. اگر $f(x)=x-2$ و $g(x)=x^2-5x+4$ باشد، روی چه بازه‌ای نمودار تابع gof، پایین محور x ها قرار می‌گیرد؟

۱۰۳. اگر $f(x)=2x-\sqrt{x}$ و $g=\{(1,5),(6,3),(2,6)\}$ دو تابع باشند به طوری‌که $g(f(a))=3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

بستهٔ سوم
تبدیل نمودار توابع
صفحهٔ ۱۵ تا ۲۳ کتاب درسی

با رسم نمودار توابع جدید به کمک انتقال از روی نمودار برخی از توابع خاص آشنایی دارید. در این بسته ابتدا این مطالب را یادآوری می‌کنیم و سپس رسم‌های جدیدی را بیان می‌کنیم. رسم‌های جدید، رسم نمودار $y=f(kx)$ از روی نمودار $y=f(x)$ است.

الف) تغییرات نمودار در راستای محور y ها

فرض کنیم نمودار $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و k **عددی حقیقی و مثبت** باشد. اگر نقطهٔ $A(a,b)$، نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه نقطهٔ $A'(a,b+k)$، نقطه‌ای روی نمودار تابع $y=f(x)+k$ می‌باشد. پس برای رسیدن به نقطهٔ A' از نقطهٔ A، کافی است نقطهٔ A را به اندازهٔ k واحد به سمت بالا انتقال دهیم. بنابراین:

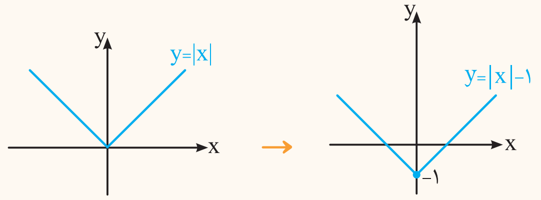
۱ برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت مثبت محور y ها (به بالا) انتقال دهیم.

به همین ترتیب:

۲ برای رسم نمودار $y=f(x)-k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در جهت منفی محور y ها (به پایین) انتقال دهیم.

سؤال نمودار $y=|x|-1$ را به کمک انتقال رسم کنید.

پاسخ برای رسم نمودار $y=|x|-1$ باید نمودار $f(x)=|x|$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم.



۲ بخش

پاسخ‌نامه

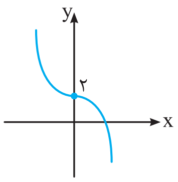
فصل ۱ **تابع**

۱ | درست

۲ | درست

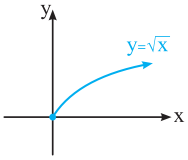
۳ | نادرست

نمودار تابع $y=-x^3+2$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع اکیداً نزولی است.



۴ | نادرست

نمودار $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است و با توجه به نمودار، تابع در دامنه‌اش، اکیداً صعودی است:



۵ | درست، زیرا بزرگ‌ترین توان x برابر ۳ است.

۶ | درست

برد توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ است. f یک تابع سه‌جمله‌ای از درجهٔ ۳ است و در نتیجه برد آن برابر $\mathbb{R}$ است.

۷ | نادرست

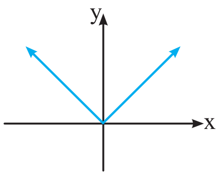
y تابع سه‌جمله‌ای از درجهٔ ۵ است.

۸ | نادرست

عبارت $\sin x$ در ضابطهٔ تابع چندجمله‌ای وجود ندارد.

۹ | نادرست

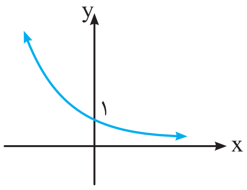
نمودار $y=|x|$ به صورت مقابل است. تابع در بازهٔ $(-\infty,0]$ نزولی و در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است و در نتیجه تابع روی $\mathbb{R}$، یکنوا نیست.



۱۰ | نادرست

۱۱ | درست

نمودار تابع نمایی $y=(\frac{1}{2})^x$ با توجه به اینکه پایه عددی بین ۰ و یک است، تابعی اکیداً نزولی است.



۱۲ | درست

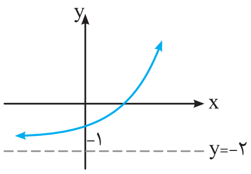
تمام توابع ثابت، جواب می‌باشند. ($y=1$ ، $y=2$ و...)

۱۳ | درست

۱۴ | درست

۱۵ | درست

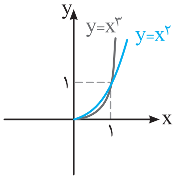
تابع نمایی وقتی که پایه بزرگ‌تر از یک باشد، تابعی اکیداً صعودی است و در نتیجه با انتقال آن به سمت پایین نیز اکیداً صعودی باقی می‌ماند.



۱۶ | یکنوا

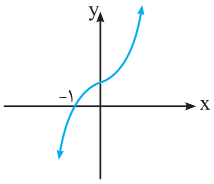
۱۷ | پایین

نمودار توابع $y=x^2$ و $y=x^3$ در بازهٔ $(0,1)$ به صورت مقابل است:



۱۸ | صعودی

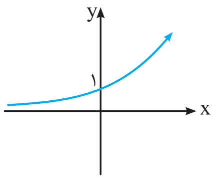
نمودار تابع $y=(x+1)^3$ به‌صورت مقابل است:



۱۹ | ثابت

۲۰ | اکیداً صعودی

نمودار تابع $y=2^x$ به صورت مقابل است که تابعی اکیداً صعودی است:

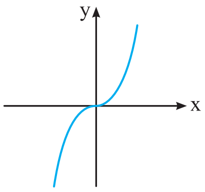


۲۱ | $(0,2)$ ، $[5,+\infty)$ ، ثابت

۲۲ | ۲

تابع در بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ نزولی است: $2=-\frac{-4}{2(1)}=-\frac{b}{2a}$

۲۳ | آ) اگر نمودار $y=x^3$ که به‌صورت مقابل می‌باشد را به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=x^3+1$ به‌دست می‌آید. نمودار (۳)، انتقال‌یافتهٔ نمودار $y=x^3$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا است.

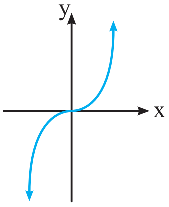


ب) اگر نمودار $y=x^3$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=-x^3-1$ به دست می‌آید. نمودار (۲)، نمودار $y=-x^3-1$ می‌باشد.

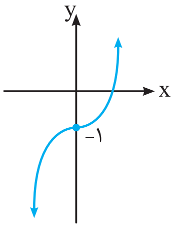
پ) اگر نمودار $y=x^3$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، نمودار $y=(x-1)^3+2$ به دست می‌آید. نمودار (۱)، نمودار $y=(x-1)^3+2$ می‌باشد.

ت) اگر نمودار $y=x^3$ را ابتدا به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=(x+1)^3-1$ به دست می‌آید. نمودار (۴)، نمودار $y=(x+1)^3-1$ می‌باشد.

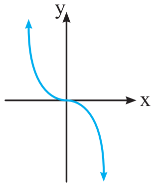
• نمودار تابع $y=x^3$ به‌صورت مقابل است:



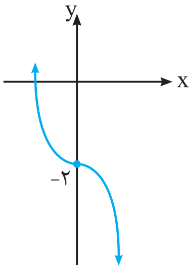
۲۴ | اگر نمودار $y=x^{۳}$ را یک واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار $y=x^{۳}-۱$ به‌دست می‌آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



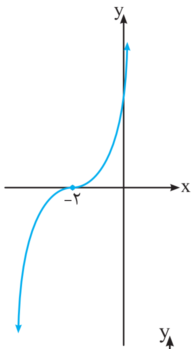
۲۵ | ابتدا نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=-x^{۳}$ به‌دست آید:



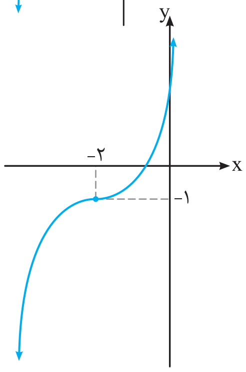
با انتقال نمودار $y=-x^{۳}$ به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین، نمودار $y=-x^{۳}-۲$ به‌دست می‌آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



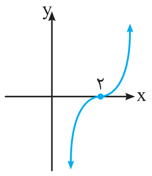
۲۶ | با انتقال نمودار $y=x^{۳}$ به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ، نمودار $y=(x+۲)^{۳}$ به‌دست می‌آید:



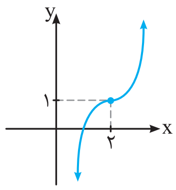
نمودار $y=(x+۲)^{۳}$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم، تا نمودار $y=(x+۲)^{۳}-۱$ به‌دست آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



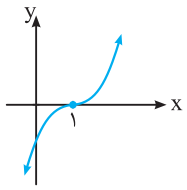
۲۷ | اگر نمودار $y=x^{۳}$ را به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-۲)^{۳}$ به‌دست می‌آید:



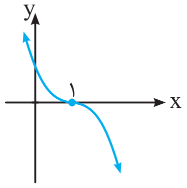
با انتقال نمودار $y=(x-۲)^{۳}$، به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا نمودار $y=(x-۲)^{۳}+۱$ به‌دست می‌آید.
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است.



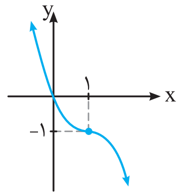
۲۸ | اگر نمودار $y=x^{۳}$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=(x-۱)^{۳}$ به‌دست می‌آید:



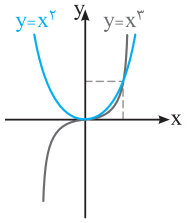
با قرینه کردن نمودار $y=(x-۱)^{۳}$ نسبت به محور xها، نمودار $y=-(x-۱)^{۳}$ به دست می‌آید:



نمودار $y=-(x-۱)^{۳}$ را یک واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم تا نمودار $y=-(x-۱)^{۳}-۱$ به دست آید:
دامنه و برد تابع برابر $\mathbb{R}$ می‌باشند.



۲۹ | در بازهٔ $(-\infty,۰)$، $x^{۲}$ عددی مثبت و $x^{۳}$ عددی منفی است. پس در بازهٔ $(-\infty,۰)$، نمودار $y=x^{۲}$ بالاتر از نمودار $y=x^{۳}$ است. در $x=۰$ و $x=۱$، مقدار دو تابع برابرند و در نتیجه دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند. در بازهٔ $(۰,۱)$، $x^{۲}$ بیش‌تر از $x^{۳}$ است و در نتیجه نمودار $y=x^{۲}$ بالاتر از نمودار $y=x^{۳}$ قرار می‌گیرد و برای $x\in(۱,+\infty)$، مقادیر $x^{۳}$ بیش‌تر از مقادیر $x^{۲}$ است و در نتیجه نمودار $y=x^{۳}$ بالاتر از نمودار $y=x^{۲}$ قرار می‌گیرد. نمودار دو تابع در یک دستگاه به صورت مقابل است:



● فرض کنیم $A\subseteq D_f$ باشد. تابع f روی A اکیداً صعودی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A, x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$$

تابع f روی A اکیداً نزولی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A\ ,\ x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

تابع f روی A صعودی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A\ ,\ x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)\le f(x_۲)$$

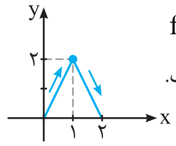
تابع f روی A نزولی است، هرگاه:

$$x_۱,x_۲\in A, x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)\ge f(x_۲)$$

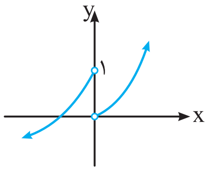
۳۰ | با توجه به شکل و با افزایش x، مقدار تابع همواره کم‌تر می‌شود. بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

۳۱ | با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $(-\infty,-۲]$ و $[۲,+\infty)$، اکیداً نزولی و در بازه‌های $(-۲,۰)$ و $[۰,۲]$، تابعی اکیداً صعودی است.

۳۲ | اگر نمودار f به‌صورت مقابل باشد، آن‌گاه نمودار f دربازهٔ $[۰,۱]$ درحال صعود و دربازهٔ $[۱,۲]$ درحال نزول است.



۳۳| اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، آن‌گاه f روی بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی است ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نمی‌باشد.



برای پاسخ به چنین سؤالاتی باید نمودار توابع غیرپیوسته را رسم کنیم.

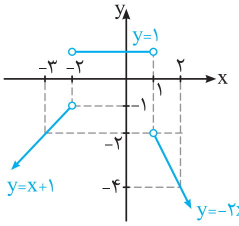
۳۴| برای رسم نمودار تابع سه‌ضابطه‌ای f، باید خط $y=x+۱$ را در محدودهٔ $(-\infty,-۲)$، خط $y=۱$ را در محدودهٔ $(-۲,۱)$ و خط $y=-۲x$ را در محدودهٔ $(۱,+\infty)$ رسم کنیم (برای رسم خط، دو نقطه از خط را مشخص می‌کنیم):

x	۱	۲
$y=-۲x$	−۲	−۴

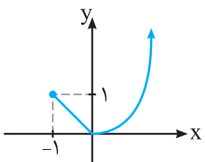
x	−۲	۱
$y=۱$	۱	۱

x	−۳	−۲
$y=x+۱$	−۲	−۱

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,-۲)$، تابعی صعودی، در بازهٔ $(-۲,۱)$، تابعی ثابت و در بازهٔ $(۱,+\infty)$، تابعی اکیداً نزولی می‌باشد.



۳۵| نمودار تابعی را رسم می‌کنیم که ابتدا اکیداً نزولی و سپس اکیداً صعودی باشد و سپس ضابطهٔ آن را می‌نویسیم:



ضابطهٔ تابع به‌صورت $f(x)=\begin{cases}-x & -۱\le x\le ۰\\ x^۲ & x>۰\end{cases}$ است.

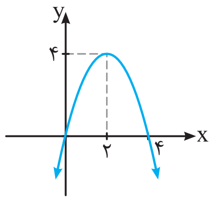
۳۶| برای رسم نمودار $y=-x^۲+۴x$، رأس سهمی و نقاط تلاقی با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم:

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=-\frac{۴}{۲(-۱)}=۲\Rightarrow y_S=-(۲)^۲+۴(۲)=۴$$

$$x=۰\Rightarrow y=۰\ ,\ y=۰\Rightarrow -x^۲+۴x=۰\Rightarrow x(-x+۴)=۰$$

$$\Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۴$$

با توجه به نمودار، تابع در بازهٔ $(-\infty,۲]$ اکیداً صعودی و تابع در بازهٔ $[۲,+\infty)$ اکیداً نزولی است.

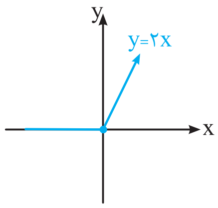


۳۷| با حذف قدرمطلق، تابع را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم و سپس نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$|x|=\begin{cases}x & x\ge ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$$

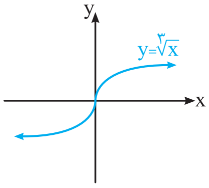
$$\Rightarrow y=x+|x|=\begin{cases}x+x & x\ge ۰\\ x+(-x) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲x & x\ge ۰\\ ۰ & x<۰\end{cases}$$

با رسم تابع ثابت $y=۰$ برای $x<۰$ و نیم‌خط $y=۲x$ برای $x\ge ۰$، نمودار تابع f رسم می‌شود:



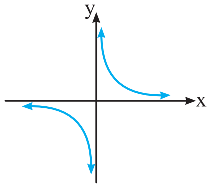
نمودار f در بازهٔ $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(-\infty,۰]$، هم صعودی و هم نزولی است (f تابع ثابت است). تابع f در بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ صعودی است.

۳۸| نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌صورت مقابل است:



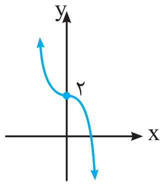
با توجه به نمودار، تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است.

۳۹| نمودار تابع گویای $y=\frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل است:



تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ اکیداً نزولی است. ولی تابع روی $\mathbb{R}$ غیریکنوا است.

۴۰| نمودار تابع $y=-x^۳+۲$ به‌صورت مقابل است:

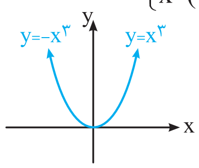


تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً نزولی است.

۴۱| ابتدا با حذف قدرمطلق، تابع را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

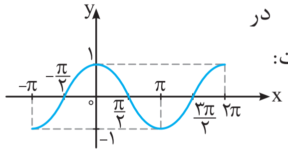
$$y=x^۲|x|=\begin{cases}x^۲(x) & x\ge ۰\\ x^۲(-x) & x<۰\end{cases}=\begin{cases}x^۳ & x\ge ۰\\ -x^۳ & x<۰\end{cases}$$

نمودار تابع به‌صورت مقابل است:



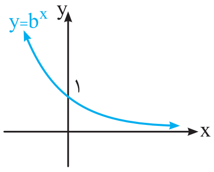
تابع در بازهٔ $(-\infty,۰]$، اکیداً نزولی و روی بازهٔ $[۰,+\infty)$، اکیداً صعودی است.

۴۲| نمودار تابع $f(x)=\cos x$ در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ به‌صورت مقابل است:

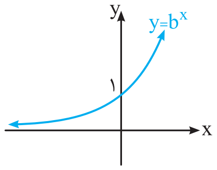


با توجه به نمودار، تابع در بازه‌های $[-\pi,۰]$ و $[\pi,۲\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۰,\pi]$، اکیداً نزولی است. تابع روی بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ غیریکنوا است.

۴۳| نمودار تابع نمایی $y=b^x$ به صورت زیر است:



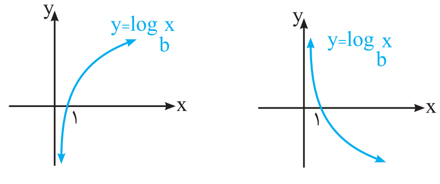
$(۰<b<۱)$



$(b>۱)$

در حالت $b>۱$، تابع $y=b^x$ روی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی و در حالت $۰<b<۱$، تابع $y=b^x$، اکیداً نزولی است.

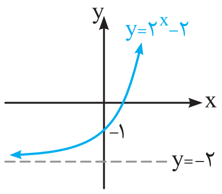
نمودار تابع لگاریتمی $y=\log_b x$ به صورت زیر است:



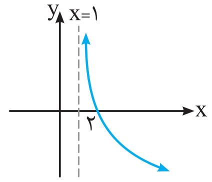
$(۰<b<۱)$ $\quad$ $(b>۱)$

در حالت $b>۱$، تابع $y=\log_b x$ روی $(۰,+\infty)$، اکیداً صعودی و در حالت $۰<b<۱$، تابع $y=\log_b x$، تابعی اکیداً نزولی است.

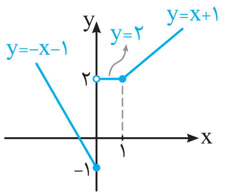
اگر نمودار تابع $y=۲^x$ را به اندازهٔ دو واحد به سمت پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $y=۲^x-۲$ به دست می‌آید: تابع روی $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی است.



اگر نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$ به دست می‌آید: تابع در بازهٔ $(۱,+\infty)$، اکیداً نزولی است.



۴۴ | نمودار تابع سه‌ضابطه‌ای f را رسم می‌کنیم. برای رسم، خط $y=x+۱$ را برای $x>۱$، تابع ثابت $y=۲$ را برای $۰<x\le ۱$ و خط $y=-x-۱$ را برای $x\le ۰$ رسم می‌کنیم.

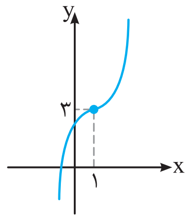


با توجه به نمودار، تابع روی بازهٔ $(-\infty,۰]$ نزولی است و در نتیجه $a=۰$ است.

۴۵ | برای رسم نمودار تابع، باید عامل $(x-a)^۳$ را بسازیم. با توجه به اتحاد مکعب دوجمله‌ای، عبارت $x^۳-۳x^۲+۳x-۱$ برابر $(x-۱)^۳$ است. بنابراین:

$$y=x^۳-۳x^۲+۳x+۲=(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۳=(x-۱)^۳+۳$$

برای رسم نمودار $y=(x-۱)^۳+۳$، باید نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست و سپس ۳ واحد به سمت بالا انتقال دهیم. نمودار تابع به صورت مقابل درمی‌آید:



۴۶ | اگر نمودار $y=ax^۳$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست و سپس به اندازهٔ ۴ واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه نمودار $y=a(x-۱)^۳+۴$، $(a>۰)$ به دست می‌آید. بنابراین در ضابطهٔ $y=a(x-b)^۳+c$، مقدار b برابر یک و مقدار c برابر ۴ است.

از طرفی نمودار از نقطهٔ $(۰,۳)$ عبور کرده است، پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ $y=a(x-۱)^۳+۴$ صدق می‌کند. بنابراین:

$$۳=a(۰-۱)^۳+۴\Rightarrow ۳=-a+۴\Rightarrow a=۱$$

۴۷ | اگر نمودار $y=ax^۳$ $(a<۰)$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت چپ و سپس به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا انتقال دهیم، آن‌گاه ضابطهٔ تابع به‌صورت $y=a(x+۱)^۳+۱$ درمی‌آید:

$$y=a(x+۱)^۳+۱=a(x+b)^۳+c\Rightarrow b=۱\,,\ c=۱$$
$$\Rightarrow y=a(x+۱)^۳+۱$$

طبق نمودار، نقطهٔ $(۰,-۱)$ روی نمودار تابع قرار دارد، بنابراین مختصات آن در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند: $-۱=a(۰+۱)^۳+۱\Rightarrow a=-۲$

با مقادیر به دست آمده برای a، b و c، ضابطهٔ تابع g را می‌نویسیم و سپس مقدار $g(۲)$ را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow g(x)=b(x-a)^۳+c\Rightarrow g(x)=(x+۲)^۳+۱$$
$$\Rightarrow g(۲)=(۲+۲)^۳+۱=۶۵$$

۴۸ | اگر نمودار $y=x^۳$ را به اندازهٔ یک واحد به سمت راست انتقال دهیم، ضابطهٔ آن به‌صورت $y=(x-۱)^۳$ درمی‌آید. با انتقال نمودار تابع $y=(x-۱)^۳$ به اندازهٔ ۷ واحد به سمت بالا، ضابطهٔ تابع g به‌صورت $g(x)=(x-۱)^۳+۷$ درمی‌آید. با حل معادلهٔ $f(x)=g(x)$، طول نقاط تلاقی نمودار توابع f و g مشخص می‌شود:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^۳=(x-۱)^۳+۷$$
$$\Rightarrow \cancel{x^۳}=(\cancel{x^۳}-۳x^۲+۳x-۱)+۷\Rightarrow ۳x^۲-۳x-۶=۰$$
$$\xrightarrow{\div ۳} x^۲-x-۲=۰\Rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۲\\ x=-۱\end{cases}$$

۴۹ | درست، زیرا: $(fog)(۴)=f(g(۴))=f(۷)=۵$

۵۰ | نادرست است، زیرا:

$$(fog)(۱)=f(g(۱))=f(\sqrt{۱^۲+۳})=f(۲)=۴-۳=۱$$
$$f(۱)=۲-۳=-۱\Rightarrow (fog)(۱)\ne f(۱)$$

۵۱ | نادرست

ضابطهٔ تابع gof به صورت $(gof)(x)=(x-۲)^۲-۱$ می‌باشد و دامنهٔ آن برابر $\mathbb{R}$ است.

۵۲ | نادرست $\quad (gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=\sin(\sqrt{x})$

۵۳ | درست است، زیرا برای آن‌که مقدار $f(g(x))$ تعریف شده باشد، باید $g(x)$ در دامنهٔ تابع f قرار داشته باشد، پس باید داشته باشیم:

$$D_f\cap R_g\ne\varnothing$$

۵۴ | نادرست است، زیرا برای دو تابع نامساوی $f(x)=۳x-۲$ و $g(x)=۴x-۳$، داریم:

$$f(g(x))=f(۴x-۳)=۳(۴x-۳)-۲=۱۲x-۱۱$$
$$g(f(x))=g(۳x-۲)=۴(۳x-۲)-۳=۱۲x-۱۱$$

۵۵ | $\frac{۱}{۳}$

ابتدا مقدار $f(۱)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{|x|}{۱+|x|}\Rightarrow f(۱)=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲}$$

مقدار $(fof)(۱)$ برابر $f(f(۱))=f(\frac{۱}{۲})$ است. بنابراین داریم:

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

---

۵۶ | gof

دامنهٔ تابع gof بنابر تعریف برابر است با:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

---

۵۷ | $x^۲$

اگر $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$ و $g(x)=x^۲$ باشد، آن‌گاه:

$$h(x)=g(f(x))=g(۲x^۲-۵x+۱)=(۲x^۲-۵x+۱)^۲$$

---

۵۸ | ۷

$$(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۳)=۷$$

---

۵۹ | ۳

$$(fog)(۵)=f(g(۵))=f(۹)=\sqrt{۹}=۳$$

---

۶۰ | در تابع fog، x را باید از دامنهٔ تابع g اختیار کنیم، ابتدا مقدار $g(x)$ و سپس مقدار $f(g(x))$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}(fog)(۴)=f(g(۴))=f(-۲)\ \text{تعریف نشده}\\ (fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۵)=-۱\Rightarrow(-۱,-۱)\in fog\\ (fog)(۲)=f(g(۲))=f(۱)=۴\Rightarrow(۲,۴)\in fog\\ (fog)(۳)=f(g(۳))=f(۰)=۲\Rightarrow(۳,۲)\in fog\end{cases}$$

$$\Rightarrow fog=\{(-۱,-۱),(۲,۴),(۳,۲)\}$$

در تابع gof، x را باید از دامنهٔ تابع f اختیار کنیم. ابتدا مقدار $f(x)$ و سپس مقدار $g(f(x))$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۴)=-۲\\ (gof)(۲)=g(f(۲))=g(۳)=۰\\ (gof)(۵)=g(f(۵))=g(-۱)=۵\\ (gof)(۰)=g(f(۰))=g(۲)=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow gof=\{(۱,-۲),(۲,۰),(۵,۵),(۰,۱)\}$$

در تابع gog، x را باید از دامنهٔ تابع g اختیار کنیم:

$(gog)(۴)=g(g(۴))=g(-۲)$ تعریف نشده

$(gog)(-۱)=g(g(-۱))=g(۵)$ تعریف‌نشده

$(gog)(۲)=g(g(۲))=g(۱)$ تعریف‌نشده

$(gog)(۳)=g(g(۳))=g(۰)$ تعریف‌نشده

بنابراین تابع gog تشکیل نمی‌شود.

---

۶۱ | مقدار fog را برای هریک از مقادیر ۰، ۵، ۳ و ۲- به دست می‌آوریم (در صورت وجود)

$(gof)(۰)=g(f(۰))=g(-۱)=۴$

$(gof)(۵)=g(f(۵))=g(۹)=۰$

$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۷)=۷$

$(gof)(-۲)=g(f(-۲))=g(۴)=$ وجود ندارد

$$\Rightarrow gof=\{(۰,۴),(۵,۰),(۳,۷)\}$$

---

۶۲ | طبق تعریف، مقدار $(gof)(۱)$ برابر $g(f(۱))$ است. طبق جدول مقدار $f(۱)$ برابر ۲ می‌باشد و در نتیجه: $g(f(۱))=g(۲)$، همچنین با توجه به جدول، مقدار $g(۲)$ برابر ۲- است و در نتیجه داریم:

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۲)=-۲$$

---

۶۳ | طبق تعریف داریم: $(fo(f+g))(۰)=f((f+g)(۰))$

ابتدا مقدار $(f+g)(۰)$ را به دست می‌آوریم:

$$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=-۱+۳=۲$$

$$\Rightarrow f((f+g)(۰))=f(۲)=-۵$$

---

۶۴ | با توجه به نمودار، مقدار $g(-۱)$ برابر ۳- است. $g(-۱)=-۳$

مقدار $(fog)(-۱)$ برابر $f(g(-۱))$ است. $f(g(-۱))=f(-۳)=۱$

---

۶۵ | طبق نمودار، مقدار تابع g در $x=-۴$ برابر صفر است. پس $g(-۴)=۰$.

$$g(۳t-۱)=۰=g(-۴)\Rightarrow ۳t-۱=-۴\Rightarrow ۳t=-۴+۱$$

$$\Rightarrow ۳t=-۳\Rightarrow t=-۱$$

---

۶۶ | ضابطهٔ توابع f و g را می‌نویسیم.

ضابطهٔ تابع f:

درمحدودهٔ $(-\infty,۰]$، f تابع خطی گذرنده از دو نقطهٔ $(-۳,۰)$ و $(۰,۳)$ است:

$$f(x)=ax+b\Rightarrow\begin{cases}f(۰)=a(۰)+b=۳\Rightarrow b=۳\\ f(-۳)=-۳a+b=۰\xrightarrow{b=۳}-۳a+۳=۰\Rightarrow a=۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=x+۳$$

در محدودهٔ $(۰,+\infty)$، f تابع خطی گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۴)$ و $(۴,۰)$ است. ضابطهٔ f به‌صورت $f(x)=-x+۴$ است. بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}x+۳ & x\le ۰\\ -x+۴ & x>۰\end{cases}$$

ضابطهٔ تابع g:

$$x\in(-\infty,-۱]\Rightarrow g(x)=-x-۱$$

$$x\in(-۱,۱)\Rightarrow g(x)=۱$$

$$x\in[۱,+\infty)\Rightarrow g(x)=۲x\Rightarrow g(x)=\begin{cases}۲x & x\ge ۱\\ ۱ & -۱<x<۱\\ -x-۱ & x\le -۱\end{cases}$$

آ) مقدار $(fog)(۲)$ با مقدار $f(g(۲))$ برابر است:

$$g(x)=۲x\Rightarrow g(۲)=۴\Rightarrow f(g(۲))=f(۴)\xlongequal{f(x)=-x+۴}۰$$

ب) $(gof)(۰)=g(f(۰))=g(۳)\xlongequal{g(x)=۲x}۶$

پ) $(gof)(۴)=g(f(۴))=g(۰)\xlongequal{g(x)=۱}۱$

ت) $(fog)(-۱)=f(g(-۱))=f(۰)=۳$

ث) $(fof)(-۴)=f(f(-۴))\xlongequal{f(x)=x+۳}f(-۱)=-۱+۳=۲$

ج) $(gog)(۵)=g(g(۵))=g(۱۰)=۲۰$

۶۷ | تابع fog را تشکیل می‌دهیم و آن را با ۲۳- برابر قرار می‌دهیم و سپس معادله را حل می‌کنیم: $(fog)(x)=f(g(x))=f(۵x+۲)$

$$\left.\begin{array}{l} f(۵x+۲)=۴(۵x+۲)-۱=۲۰x+۷ \\ (fog)(x)=-۲۳\end{array}\right\}\Rightarrow ۲۰x=-۳۰\Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

۶۸ | با استفاده از ضابطهٔ توابع f و g، ضابطهٔ تابع $(gof)(x)$ را می‌نویسیم و آن را برابر ۱- قرار می‌دهیم و با حل معادله، جواب‌های آن را به دست می‌آوریم: $(gof)(x)=g(f(x))=g(۳x^۲-۴x-۷)$

$$=۲(۳x^۲-۴x-۷)+۵=۶x^۲-۸x-۹$$

$$(gof)(x)=-۱\Rightarrow ۶x^۲-۸x-۹=-۱\Rightarrow ۶x^۲-۸x-۸=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲}۳x^۲-۴x-۴=۰\ ,\ \Delta=b^۲-۴ac=(-۴)^۲-۴(۳)(-۴)=۶۴$$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۴\pm۸}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

۶۹ | ضابطهٔ توابع fog و gof را به دست می‌آوریم و آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(fog)(x)=f(g(x))\xlongequal{g(x)=۳x+k}f(۳x+k)$$

$$\xlongequal{f(x)=۲x+۱}۲(۳x+k)+۱=۶x+۲k+۱\quad(۱)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(۲x+۱)=۳(۲x+۱)+k=۶x+۳+k\quad(۲)$$

$$(fog)(x)=(gof)(x)\xrightarrow{(۱),(۲)}\cancel{۶x}+۲k+۱=\cancel{۶x}+۳+k$$

$$\Rightarrow ۲k-k=۳-۱\Rightarrow k=۲$$

۷۰ | دامنهٔ تابع fog با استفاده از تعریف به صورت $\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$ است. در مرحلهٔ اول باید دامنهٔ توابع f و g را به دست بیاوریم. f یک تابع کسری گویا است:

$$f(x)=\frac{x+۳}{۲x}\ ,\ ۲x\neq۰\Rightarrow x\neq۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$$

g یک تابع دوجمله‌ای از درجهٔ یک است و در نتیجه: $D_g=\mathbb{R}$ (۱)

درمرحلهٔ دوم، شرط $g(x)\in D_f$ را که معمولاً یک نامعادله است، بررسی می‌کنیم:

$$g(x)\in D_f\Rightarrow ۳x-۱\in\mathbb{R}-\{۰\}\Rightarrow ۳x-۱\neq۰\Rightarrow ۳x\neq۱\Rightarrow x\neq\frac{۱}{۳}\quad(۲)$$

از اشتراک (۱) و (۲)، دامنهٔ fog به دست می‌آید:

$$(۱)\cap(۲)\Rightarrow D_{fog}=\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\})=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۳}\}$$

۷۱ | طبق تعریف، داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$

دامنهٔ تابع $f(x)=\sin x$ برابر $\mathbb{R}$ است و داریم:

$$g(x)=\sqrt{۱-x^۲}\Rightarrow ۱-x^۲\geq۰\Rightarrow x^۲\leq۱$$

$$\xrightarrow{\text{ریشهٔ دوم می‌گیریم}}\sqrt{x^۲}\leq۱\Rightarrow|x|\leq۱\Rightarrow -۱\leq x\leq۱$$

$$\Rightarrow D_g=[-۱,۱]$$

باید شرط $f(x)\in D_g$ را حل کنیم:

$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sin x\in[-۱,۱]\Rightarrow -۱\leq\sin x\leq۱$$

می‌دانیم $\sin x$ همواره عددی از ۱- تا ۱ است، بنابراین نامساوی $-۱\leq\sin x\leq۱$ به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ برقرار است. پس داریم:

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

۷۲ | $(gof)(x)=g(f(x))=g(\sin x)$

$$=\sqrt{۱-\sin^۲x}=\sqrt{\cos^۲x}=|\cos x|$$

۷۳ | طبق تعریف، داریم: $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$

دامنهٔ توابع f و g را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۱-x\geq۰\Rightarrow x\leq۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$$

$$g(x)=\sqrt{x-۱}\Rightarrow x-۱\geq۰\Rightarrow x\geq۱\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$$

$$f(x)\in D_g\Rightarrow\sqrt{۱-x}\in[۱,+\infty)\Rightarrow\sqrt{۱-x}\geq۱$$

$$\xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}}۱-x\geq۱\Rightarrow x\leq۰\Rightarrow x\in(-\infty,۰]$$

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in(-\infty,۱]\,|\,x\in(-\infty,۰]\}=(-\infty,۰]$$

۷۴ | مقدار $(gof)(-۳)$ با مقدار $g(f(-۳))$ برابر است، داریم:

$$f(x)=\sqrt{۱-x}\Rightarrow f(-۳)=\sqrt{۱-(-۳)}=۲$$

$$\Rightarrow g(f(-۳))=g(۲)\xlongequal{g(x)=\sqrt{x-۱}}\sqrt{۲-۱}=۱$$

۷۵ | f یک تابع کسری گویاست و داریم:

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۱\}$$

دامنهٔ تابع رادیکالی g را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=\sqrt{۱-x}\ ,\ ۱-x\geq۰\Rightarrow x\leq۱\Rightarrow D_g=(-\infty,۱]$$

۷۶ | دامنهٔ تابع gof برابر است با: $D_{gof}=\{x\in D_f\,|\,f(x)\in D_g\}$

$$f(x)\in D_g\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}\leq۱\Rightarrow\frac{۲x-۳}{x+۱}-۱\leq۰$$

$$\Rightarrow\frac{۲x-۳-(x+۱)}{x+۱}\leq۰\Rightarrow\frac{x-۴}{x+۱}\leq۰$$

برای حل نامعادله، باید $P=\frac{x-۴}{x+۱}$ را تعیین علامت کنیم:

$$x-۴=۰\Rightarrow x=۴\ ,\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

x		-۱		۴	
$x-۴$	−		−	۰	+
$x+۱$	−	۰	+		+
$\frac{x-۴}{x+۱}$	+	ت ن	−	۰	+

$$\frac{x-۴}{x+۱}\leq۰\Rightarrow x\in(-۱,۴]$$

$$\Rightarrow D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}-\{-۱\}\,|\,x\in(-۱,۴]\}=(-۱,۴]$$

توجه کنید که برای حل نامعادلهٔ $\frac{۲x-۳}{x+۱}\leq۱$، نباید طرفین وسطین کنیم.

ویرایش جدید

منطبق بر امتحانات نهایی «دی» و «خرداد ۴۰۲»

گاج

صد تست امتحانی

ریاضی ۳

فرمول بیست

حسین اسفینی
یوسف داستان

هدیه رایگان

فرمول بیست

در این کتابچه، سؤالات امتحان نهایی چند سال اخیر، به دقت تیپ بندی شده و درسنامه‌های عالی برای آن ارائه شده است. هم‌چنین توجه ویژه‌ای به مفاهیم و تمرینات کتاب درسی شده و پاسخ‌های کاملاً تشریحی منطبق با پاسخ نامهٔ امتحانات نهایی برای سؤالات نوشته‌ایم. با مطالعهٔ این کتابچه، با آمادگی کامل سر جلسه امتحان حاضر شوید!

تهران، میدان انقلاب
نبش بازارچه کتاب
www.gajmarket.com

فهرست

فصل ۱

تابع

بستهٔ ۱ توابع چندجمله‌ای

تیپ ۱

تیپ ۱ جای خالی یا صحیح و غلط از تعریف توابع چندجمله‌ای (تابع درجهٔ سوم) و مفاهیم آن می‌دهند. پس به مفاهیم زیر توجه کنید:

تابع چندجمله‌ای درجهٔ n: هر تابع به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_0, a_1, \dots, a_n$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ است، یک تابع چندجمله‌ای از **درجهٔ n** می‌نامیم. دامنهٔ این توابع، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. (شهریور ۱۴۰۰)

مثال تابع $y = \sqrt{3}x^3 - \pi x + 1$ یک تابع چندجمله‌ای است. (شهریور ۱۴۰۲)

مثال تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است. زیرا اگر ضابطهٔ تابع را ساده کنیم به‌صورت $y = -6x^3 + 2x + 1$ درمی‌آید. (دی ۱۴۰۱)

ایستگاه مثال

جملهٔ «تابع $f(x) = x(x^2 - 1)$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ دو است» درست است یا نادرست؟ (خرداد خارج ۱۴۰۳)

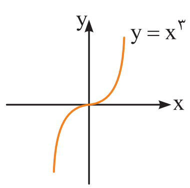
پاسخ نادرست. زیرا:

$f(x) = x(x^2 - 1) = x^3 - x \Rightarrow$ تابع چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است.

نکته تابع ثابت و تابع خطی مثال‌هایی از تابع چندجمله‌ای و به ترتیب با درجه‌های ۰ و ۱ هستند.

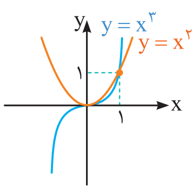
تابع درجهٔ سوم

تابع چندجمله‌ای $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ یک تابع درجهٔ ۳ است که دامنه و برد آن $\mathbb{R}$ است و نمودار مهم‌ترین آن‌ها یعنی $y = x^3$ به‌صورت مقابل است:



نکته مقایسهٔ رفتار تابع $y = x^2$ و $y = x^3$:

با توجه به نمودار مقابل، در بازه‌های $x < 0$ و $0 < x < 1$ نمودار $y = x^2$ بالاتر از $y = x^3$ و در بازهٔ $x > 1$ نمودار $y = x^3$ بالاتر از $y = x^2$ قرار دارد.



ایستگاه مثال

آیا نمودار تابع $y = x^2$ در بازهٔ $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است؟ (دی ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱)

پاسخ با توجه به نکتهٔ فوق جواب «خیر» است.

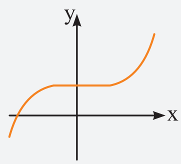
تیپ ۱ **جای خالی یا صحیح و غلط از مفاهیم صعودی و نزولی می‌دهند. پس نکات زیر را خوب به خاطر بسپارید.**

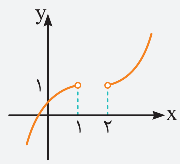
تعریف

اگر $x_2 > x_1$ و داشته باشیم:

$f(x_2) \geq f(x_1)$، آن‌گاه f صعودی است.

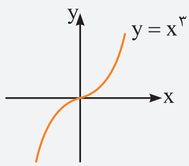
مثلاً:



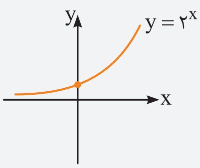


$f(x_2) > f(x_1)$، آن‌گاه f اکیداً صعودی است.

مثلاً:

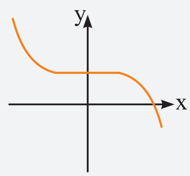


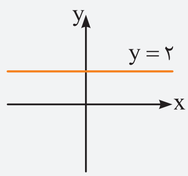
(خرداد ۱۴۰۱)



$f(x_2) \leq f(x_1)$، آن‌گاه f نزولی است.

مثلاً:

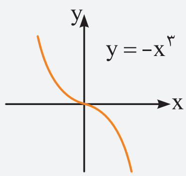


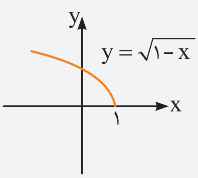


هم صعودی هم نزولی

$f(x_2) < f(x_1)$، آن‌گاه f اکیداً نزولی است.

مثلاً:



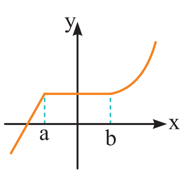


❶ به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا می‌گوییم.

❷ به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا می‌گوییم.

❸ توابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا هستند. (دی ۹۹ خارج)

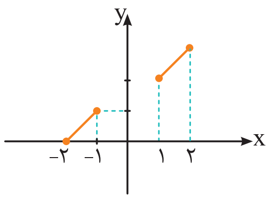
❹ توابع یکنوا، همواره اکیداً یکنوا نمی‌باشند! مثلاً نمودار روبه‌رو صعودی بوده لذا یکنوا است. اما چون در بازهٔ $[a,b]$، مقدار تابع ثابت است، پس این تابع اکیداً یکنوا نمی‌باشد. پس توابع یکنوا ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم نباشند.



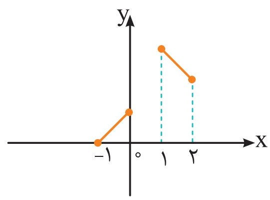
❺ توابع ثابت، $f(x) = a$ در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی هستند. چون a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد، لذا بی‌شمار تابع ثابت و در نتیجه بی‌شمار تابع هم صعودی و هم نزولی داریم. (خرداد ۹۹ و ۱۴۰۲)

❻ هر تابع اکیداً یکنوا، یک به یک است. (شهریور ۹۹) ولی توابع یکنوا ممکن است یک به یک باشند، شاید هم یک به یک نباشد! پس جملهٔ «هر تابع یکنوا، یک به یک است» غلط است. (دی ۱۴۰۱)

❼ توابع یک‌به‌یک، ممکن است اکیداً یکنوا باشند، شاید هم اکیداً یکنوا نباشند. مثلاً در شکل (الف) تابع یک‌به‌یک بوده و اکیداً یکنوا است ولی در شکل (ب) تابع یک‌به‌یک بوده ولی اکیداً یکنوا نمی‌باشد:



(الف)



(ب)

ایستگاه مثـــال

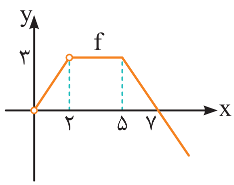
جملهٔ «هر تابع یک‌به‌یک، اکیداً یکنواست.» درست است یا نادرست؟ (خرداد خارج ۱۴۰۳)

پاسخ با توجه به نکتهٔ (۷) نادرست است.

تیپ ۲ **نمودار f را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن f را با توجه به نمودار آن بررسی کنیم.**

روش حل با توجه به نمودار، بزرگ‌ترین بازهٔ موردنظر را از جهت صعودی یا نزولی بودن می‌نویسیم.

مثال در نمودار مقابل f در بازهٔ $(۰,۲)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[۵,+\infty)$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[۲,۵]$ ثابت (هم صعودی و هم نزولی) است. (خرداد ۹۱)



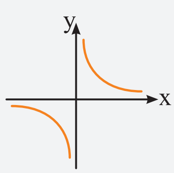
تیپ ۳ **ضابطهٔ f را می‌دهند و از ما می‌خواهند صعودی یا نزولی بودن f را بررسی کنیم.**

روش حل با توجه به ضابطهٔ f، نمودار را رسم کرده و با توجه به نمودار، صعودی یا نزولی بودن f در بازه‌های مختلف را بررسی می‌کنیم.

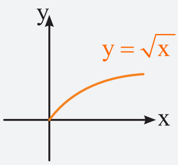
ایستگاه مثـــال

۱. آیا $y=\frac{۱}{x}$ در دامنه‌اش یکنوا است؟ (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ خیر، نمودار $y=\frac{۱}{x}$ به‌صورت مقابل است. با این‌که تابع در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ نزولی و لذا در این بازه‌ها یکنوا است ولی در کل دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی بوده و یکنوا نمی‌باشد!

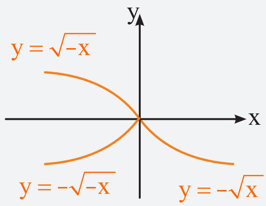


۲. آیا $y=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

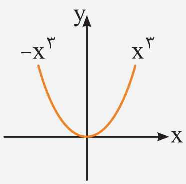


پاسخ خیر، با توجه به نمودار زیر، این تابع اکیداً صعودی است.

نمودارهای مهم زیر را به خاطر داشته باشید.



۳. تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر a را بیابید. (کتاب درسی)



پاسخ با توجه به حضور قدرمطلق، تابع دوضابطه‌ای به‌صورت $y=\begin{cases} x^2(x)=x^3 & ; x\geq 0 \\ x^2(-x)=-x^3 & ; x<0 \end{cases}$ می‌شود. آن را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل مشخص است که تابع در بازهٔ $(-\infty,a]$ که حداکثر a برابر ۰ است، نزولی می‌باشد.

۴. تابع $g(x)=x^2-4x+5$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است .... (خرداد ۱۴۰۳)

پاسخ طول رأس سهمی $x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-4)}{2(1)}=2$ است و چون $a=1>0$ است.

دهانهٔ سهمی رو به بالا است. پس نمودار آن به صورت

است. با توجه به شکل، سهمی در هر بازه‌ای به صورت $(-\infty,a]$ با شرط $a\leq 2$ نزولی است. پس حداکثر a، همان طول رأس سهمی یعنی $a=2$ است. دقت کنید به محض اینکه $a>2$ شود، تابع غیریکنوا می‌شود!

بسته ۳ ترکیب توابع — تیپ ۷

تیپ ۱ محاسبهٔ fog که f و g به صورت زوج مرتبی هستند.

روش حل ابتدا تابع داخلی (g) را به‌صورت فلشی می‌نویسیم و سپس تابع خارجی (f) را به‌صورت فلشی می‌نویسیم. سپس نگاه می‌کنیم اعداد یکسان که انتهای فلش g و ابتدای فلش f هستند را به هم وصل می‌کنیم. حال اولین عدد و آخرین عدد در هر سطر را به‌عنوان زوج مرتب می‌نویسیم.

ایستگاه مثال

۱. اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$، آن‌گاه $fog(4)$ چقدر می‌شود؟ (دی ۱۴۰۰)

پاسخ ابتدا تابع داخلی (g) و سپس تابع خارجی (f) را به صورت فلشی می‌نویسیم:

$$4 \xrightarrow{g} 7 \rightarrow 7 \xrightarrow{f} \underset{\text{جواب}}{5} \Rightarrow f(\overbrace{g(4)}^{7}) = f(7) = 5$$

۲. اگر $f=\{(0,-1),(5,9),(3,7),(-2,4)\}$ و $g=\{(1,2),(3,-1),(9,0),(-1,4),(7,7)\}$، تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ ابتدا تابع داخلی (f) و سپس تابع خارجی (g) را به صورت فلشی می‌نویسیم:

$$\begin{array}{lcl} 0 \xrightarrow{f} -1 & \quad & 1 \xrightarrow{g} 2 \\ 5 \xrightarrow{f} 9 & & 3 \xrightarrow{g} -1 \\ 3 \xrightarrow{f} 7 & & 9 \xrightarrow{g} 0 \\ -2 \xrightarrow{f} 4 & & -1 \xrightarrow{g} 4 \\ & & 7 \xrightarrow{g} 7 \end{array} \Rightarrow gof = \{(0,4),(5,0),(3,7)\}$$

تیپ ۲ محاسبهٔ $fog(a)$ که f و g به صورت ضابطه‌ای داده شده است.

روش حل ابتدا a را وارد تابع g می‌کنیم و جواب آن (یعنی $g(a)$) را وارد تابع f می‌کنیم. به همین راحتی!

ایستگاه مثال

۱. اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$ باشد، مقدار $(fof)(1)$ برابر .... است. (دی ۱۴۰۳)

پاسخ ابتدا $x=1$ را وارد تابع f کرده و جوابش را مجدداً وارد تابع f می‌کنیم.

$$x=1 \underset{\text{می‌شود}}{\overset{\text{f وارد}}{\Longrightarrow}} f(1)=\frac{|1|}{1+|1|}=\frac{1}{2} \underset{\text{می‌شود}}{\overset{\text{f مجدداً وارد}}{\Longrightarrow}} \frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{1+\left|\frac{1}{2}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

۲. اگر $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ باشد، مقدار $(gof)(13)$ را بیابید. (خرداد ۹۸)

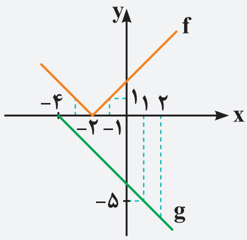
پاسخ

$$x=13 \underset{\text{می‌شود}}{\overset{\text{f وارد}}{\Longrightarrow}} \sqrt{13-4}=\sqrt{9}=3 \underset{\text{می‌شود}}{\overset{\text{g وارد}}{\Longrightarrow}} \frac{1}{3^2-1}=\frac{1}{9-1}=\frac{1}{8}$$

تیپ ۳ محاسبهٔ ترکیب توابع از روی نمودار

ایستگاه مثـــال

حاصل $gof(-۱)$ را با توجه به نمودار بیابید. (دی ۱۴۰۰)



پاسخ

$$g(f(-۱)) \xlongequal[f(-۱)=۱]{\text{نمودار}:(-۱,۱)\in f} g(۱) \xlongequal[g(۱)=-۵]{\text{نمودار}:(۱,-۵)\in g} -۵$$

تیپ ۴ محاسبهٔ ضابطهٔ توابع fog و gof و دامنه آن‌ها از روی ضابطهٔ f و g:

روش حل **الف. محاسبهٔ دامنه:** توابع f و g را به ما می‌دهند. ابتدا دامنهٔ f و g را حساب کرده و سپس طبق تعاریف زیر، دامنهٔ تابع خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$D_{gof}=\{\overbrace{x\in D_f}^{\text{قسمت اول}},\overbrace{f(x)\in D_g}^{\text{قسمت دوم}}\} \qquad D_{fog}=\{\overbrace{x\in D_g}^{\text{قسمت اول}},\overbrace{g(x)\in D_f}^{\text{قسمت دوم}}\}$$

تذکر در قسمت دوم دامنهٔ fog یا gof، باید با توجه به ضابطهٔ f و g، یک معادله یا نامعادله یا ... حل کنید و جوابش را با قسمت اول دامنه، اشتراک بگیرید.

ب. محاسبهٔ ضابطه: برای پیدا کردن ضابطهٔ fog، کافی است در تابع f به جای xها، $g(x)$ قرار دهیم.
به‌طور مشابه برای پیدا کردن ضابطهٔ gof، کافی است در تابع g به جای xها، $f(x)$ را قرار دهیم.

ایستگاه مثـــال

اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x-۱$، آن‌گاه: (خرداد ۱۴۰۲)

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

ب) ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

پاسخ الف)

مرحلهٔ (۱): دامنهٔ f و g برابر است با:

$$D_f:\ \overbrace{x+۱}^{\text{زیر رادیکال}}\ \geq ۰ \Rightarrow x\geq -۱$$

$$D_g=\mathbb{R}$$

مرحلهٔ (۲): جای‌گذاری در فرمول D_{fog}:

$$D_{fog}=\{x\in D_g,g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R},\underbrace{x-۱}_{g(x)}\geq -۱ \xRightarrow{\text{حل نامعادله}} x\geq ۰\}\Rightarrow D_{fog}=[۰,+\infty)$$

اشتراک

ب) در تابع f، به جای xها، $g(x)$ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=\sqrt{x+۱}\Rightarrow f(g(x))=\sqrt{g(x)+۱}\xlongequal{g(x)=x-۱}\sqrt{(x-۱)+۱}=\sqrt{x}$$